Trigonalisation

Définition : Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, est dit trigonalisable ssi il existe une base $\mathscr{E}$ de E telle que la matrice de u dans cette base soit triangulaire.

Définition : Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$est dite trigonalisable ssi M est semblable à une matrice triangulaire, cad ssi il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}MP = T$, avec T matrice triangulaire.

Remarques

- $u \in \mathscr{L}(E)$ est trigonalisable ssi pour toute base $\mathscr{E}$ de E, $\text{Mat}(u, \mathscr{E})$ est trigonalisable ssi il existe une base $\mathscr{E}$ de E, $\text{Mat}(u, \mathscr{E})$ soit trigonalisable.
- Si u (rp. M) est diagonalisable, u (rp. M) est trigonalisable.
- Toutes les matrices triangulaires sont trigonalisables : on écrit $I_n^{-1} T I_n = T$, avec $I_n \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$.

Théorème $u \in \mathscr{L}(E)$ (rp $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé.

Corollaire : Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev, toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Démo : Montrons par récurrence sur $n \geq 1$, que toute matrice d'ordre n dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable.

- $n = 1$: Une matrice d'ordre 1 est triangulaire donc trigonalisble.
- Supposons toute matrice d'ordre $n \geq 1$ de polynôme scindé trigonalisable et considérons une matrice M d'ordre $n+1$ de polynôme scindé $P = \chi_M$. Il existe donc au moins une valeur propres λ et un vecteur $U \neq 0$ attaché à λ, cad $MU = \lambda U$.. Complétons U en $\mathscr{F} = (U, X_1, \dots, X_n)$ une base de $\mathbb{K}^{n+1} \sim M_{n+1,1}(\mathbb{K})$. Si nous considérons Q la matrice constituée de cettes base « *en colonnes* », qui n'est rien d'autre que la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$ à $\mathscr{F}$, on peut écrire :

  $$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \lambda & {}^tV \\ 0 & A \end{pmatrix}, \text{avec } A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ et } V \in \mathbb{K}^n \sim M_{n,1}(\mathbb{K}) \qquad Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \quad Q'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$$

  On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à A, il existe $P \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = T$. On pose alors Q' comme plus haut. On calcule alors :

  $$Q'^{-1}Q^{-1}MQQ' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & {}^tV \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & {}^tVP \\ 0 & AP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & {}^tVP \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

  Cette dernière matrice étant triangulaire supérieure, la preuve est acquise.

Pratique de la trigonalisation On suppose donnée une matrice M carrée réelle d'ordre n dont le polynôme caractéristique est scindé. On note $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les valeurs propres 2 à 2 distinctes (donc $p \le n$) et on suppose que M n'est pas diagonalisable, (donc $p \le n-1$), ce qui signifie que :

$$\operatorname{Ker}(M-\lambda_1 I_n) \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker}(M-\lambda_p I_n) \not\subset \mathbb{R}^n \qquad \text{ou} \qquad \dim(\operatorname{Ker}(M-\lambda_1 I_n)) + \dots + \dim(\operatorname{Ker}(M-\lambda_p I_n)) \le n-1$$

Cas simple : $\dim \operatorname{Ker}(M-\lambda_1 I_n)+\dots+\dim \operatorname{Ker}(M-\lambda_p I_n) = n-1$

Dans ce cas, il est facile de trigonaliser. On commence par se calculer une famille de $n-1$ vecteurs propres indépendants (possible d'après les hypothèses), et on complète en une base $\mathscr{E}$ de $\mathbb{R}^n$ en « *rajoutant* » un vecteur à la fin. « *Dans* » cette base, la matrice sera triangulaire. *Exemple :*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ -7 & 1 & -6 \\ -10 & 1 & -7 \end{pmatrix} \qquad \det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 1 & 6 \\ -7 & 1-\lambda & -6 \\ -10 & 1 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \dots = -(2-\lambda)^2(1+\lambda) \qquad A-2I_3 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 6 \\ -7 & -1 & -6 \\ -10 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

On remarque, sur $A-2I_3$, $C_2+C_3=C_1$, cad $U=(1,-1,-1) \in \operatorname{Ker}(A-2I_3) = E_A(2)$. D'autre part, C_1 n'est pas colinéaire à C_2, ce qui donne $\operatorname{rg}(A-2I_3)=2$ et $\dim \operatorname{Ker}(A-2I_3)$. A n'est donc pas diagonalisable et $E_A(2) = \operatorname{Vect}(1,-1,-1)$. Le lecteur calculera aisément $E_A(-1) = \operatorname{Ker}(A+I_3) = \operatorname{Vect}(-2,2,3) = \operatorname{Vect}(V)$. On complète alors en ajoutant $e_1=(1,0,0)$. $\mathscr{E}=(U,V,E_1)$ est alors une base de $\mathbb{R}^3$. On écrit alors, par changement de bases :

$$P = P_{\varepsilon}^{\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ sans calcul...}$$

Pour calculer la dernière colonne, il faut exprimer AE_1 dans la base $\mathscr{E}$. (*Note :* $c=2$ est prévisible. Pourquoi ?)

$$AE_1 = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ -7 & 1 & -6 \\ -10 & 1 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ -10 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} a-2b+c & = & 9 \\ -a+2b & = & -7 \\ -a+3b & = & -10 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & -3 \\ c & = & 2 \end{array}\right.$$

Cas général : $\dim \operatorname{Ker}(M-\lambda_1 I_n)+\dots+\dim \operatorname{Ker}(M-\lambda_p I_n) \le n-2$

On prend juste un exemple où $n=3$, une valeur propre triple (ici 1) dont l'espace propre est de dimension 1.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix} \quad \det(A-\lambda I_3) = -(\lambda-1)^3 \quad A-I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -15 & -7 & 11 \\ -14 & -6 & 10 \end{pmatrix} \quad \operatorname{Ker}(A-I_3) = \operatorname{Vect}(1,1,2) = \operatorname{Vect}(E_1)$$

Il y a différentes méthodes. La plus simple : on admet que l'on peut toujours mettre des 0 sauf sur la « sur-diagonale » et ensuite on résoud à la main...

$$T = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad AE_2 = \begin{pmatrix} -2x-y+2z \\ -15x-6y+11z \\ -14x-6y+11z \end{pmatrix} = aE_1+E_2 = \begin{pmatrix} a+x \\ a+y \\ 2a+z \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} -3x-y+2z & = & a \\ -15x-7y+11z & = & a \\ -14x-6y+10z & = & 2a \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & x+3a \\ z & = & 2x+2a \end{array}\right.$$

On prend $a \ne 0$, par exemple $a=1$ puis $x=0$, puis $E_2=(0,3,2)$

$$AE_3 = bE_2+E_3 = \begin{pmatrix} x \\ 3b+y \\ 2b+z \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} -3x-y+2z & = & 0 \\ -15x-7y+11z & = & 3b \\ -14x-6y+10z & = & 2b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & x-2b \\ z & = & 2x-b \end{array}\right. \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On a pris $b=-1$ puis $E_3=(0,2,1)$